Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)
Preparador: Ricardo J. Fernández Terán (RicharOrange@hotmail.com)
(Laboratorio de Fotoquímica y Fotobiología, QYP-001A)

SOLUCIONES EXPLICADAS DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL (25 %)

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2013 Tipo Único

1. Hallar el conjunto de todas las soluciones de la inecuación:

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}<1$$

Solución:

Se trata de una inecuación racional con valor absoluto por lo que hay que comparar con cero:

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}-1<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{|x-3|-2-(|4-x|-1)}{|4-x|-1}<0$$

$$\frac{|x-3|-|4-x|-1}{|4-x|-1}<0$$

La expresión $|x-3|$ cambia en $x=3$, y la expresión $|4-x|$ lo hace en $x=4$, por lo que las soluciones por segmento de la recta real son:

Segmento I: $x<3 \Rightarrow \begin{cases}|x-3|=3-x\\|4-x|=4-x\end{cases}$

$$\frac{(3-x)-(4-x)-1}{(4-x)-1}<0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{3-x}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3-x}>0$$

Puntos críticos: $\{3\}$

Se tiene que si $x<3$, entonces $3-x>0$ y como el numerador es siempre positivo, la solución en este segmento es entonces: $\mathbf{Sol_1}\equiv(-\infty,3)$

Segmento II: $3<x<4 \Rightarrow \begin{cases}|x-3|=x-3\\|4-x|=4-x\end{cases}$

$$\frac{(x-3)-(4-x)-1}{(4-x)-1}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x-8}{3-x}<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2(x-4)}{3-x}<0$$

Puntos críticos: $\{3;\ 4\}$

Considero sólo los intervalos tales que $3<x<4$ y evalúo en los puntos críticos.

Segmento II	$(3,4)$
$x-4$	$-$
$3-x$	$-$
$\frac{2(x-4)}{3-x}$	$+$
	$\mathbf{Sol_2}\equiv\emptyset$

Segmento III: $x > 4 \implies \begin{cases} |x-3| = x-3 \\ |4-x| = x-4 \end{cases}$

$$\frac{(x-3)-(x-4)-1}{(x-4)-1} < 0 \quad \implies \quad \frac{0}{x-5} < 0 \quad \implies \quad 0 < 0$$

Puntos críticos: $\{5\}$

Esta expresión es falsa para cualquier $x \in \mathbb{R} - \{5\}$, ya que por la tricotomía del orden en $\mathbb{R}$, se tiene que $a > b$ ó $a < b$ ó $a = b$, y como $0 = 0$ entonces no se puede tener que $0 < 0$, luego $\mathbf{Sol_3} \equiv \emptyset$

Los puntos críticos quedan excluidos por ser una desigualdad estricta, y en el caso de $x = 5$ por anular el denominador.

Sabemos entonces que: **SOLUCIÓN** $\equiv \mathbf{Sol_1} \cup \mathbf{Sol_2} \cup \mathbf{Sol_3} = \mathbf{(-\infty, 3)} \cup \emptyset \cup \emptyset = \mathbf{(-\infty, 3)}$

2. Sea L la recta de ecuación $L \equiv 4y - 3x + 18 = 0$ y $P(-4, 5)$ un punto.

a) Halle la ecuación de la recta L' que es paralela a L y pasa por P.

b) Halle la ecuación de la circunferencia tangente a L y L' que pasa por P.

Solución:

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, luego lo único que cambia entre sus ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$ es el valor de C. Para que pase por P se tiene:

$$4(5) - 3(-4) + C = 0 \quad \implies \quad C = -32$$

Así, la ecuación de $\boldsymbol{L' \equiv 4y - 3x - 32 = 0}$, que también se puede escribir como $\boldsymbol{L' \equiv y = {}^{3x}/_{4} + 8}$

La circunferencia tangente a ambas rectas que pasa por P tendrá en P el punto de tangencia con la recta L', con lo que hallando la ecuación de una recta perpendicular a L' que pase por P tendré una recta que contenga al centro y podré calcular la mitad de la distancia entre ambas rectas, que será el radio de la circunferencia. Así, si T es la recta perpendicular a L' que pasa por P, tengo:

$$T \equiv 4x + 3y + C = 0 \quad \implies \quad 4(-4) + 3(5) + C = 0 \quad \implies \quad C = 1$$

Con lo que $T \equiv 4x + 3y + 1 = 0$, y la intersección de ambas rectas ocurrirá en un cierto punto Q, que se hallará resolviendo el sistema $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ -3x + 4y + 18 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

Así, tenemos el punto $Q(2, -3)$. El radio de la circunferencia será la mitad de la distancia entre P y Q (calculo r^2 por simplicidad):

$$r^2 = \frac{(-4-2)^2 + \left(5-(-3)\right)^2}{4} = 25$$

El centro será el punto medio del segmento $\overline{PQ}$:

$$C = \left(\frac{-4+2}{2}; \frac{5+(-3)}{2}\right) = (-1, 1)$$

Así, la ecuación canónica de la circunferencia pedida será: $\boldsymbol{(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25}$

3. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- **a)** Bosqueje las gráficas de ambas funciones, f y g por separado.
- **b)** Determine el dominio y el rango de f y g.
- **c)** Halle $(g \circ f)(x)$

Solución: *(Las gráficas se encuentran en la siguiente página)*

La función $f(x)$ es un polinomio, luego $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R}$, y como $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 + 1 \geq 1$, de donde $\mathrm{Rg}_f = [1, +\infty)$.

La función $g(x)$ es a trozos, y $\mathrm{Dom}_g = (-\infty, 2) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$. El rango se tendrá por segmentos:

Segmento I: $x < 2 \implies x + 3 < 5 \implies \mathrm{Rg}_{g1} = (-\infty, 5)$

Segmento II: $x \geq 2 \implies x - 2 \geq 0 \implies \sqrt{x-2} \geq 0 \implies \mathrm{Rg}_{g2} = [0, +\infty)$

Luego $\mathrm{Rg}_g = (-\infty, 5) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$

La composición se realiza sustituyendo literalmente:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} f(x) + 3 & \text{si } f(x) < 2 \\ \sqrt{f(x) - 2} & \text{si } f(x) \geq 2 \end{cases}$$

Ahora calculamos los intervalos de definición en términos del dominio de la función interna:

$$f(x) < 2 \longrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 < 2 \\ x \in \mathrm{Dom}_f \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 < 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies |x| < 1 \implies x \in (-1, 1)$$

$$f(x) < 2 \iff x \in (-1, 1)$$

$$f(x) \geq 2 \longrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 2 \\ x \in \mathrm{Dom}_f \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies |x| \geq 1 \implies x \in \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big)$$

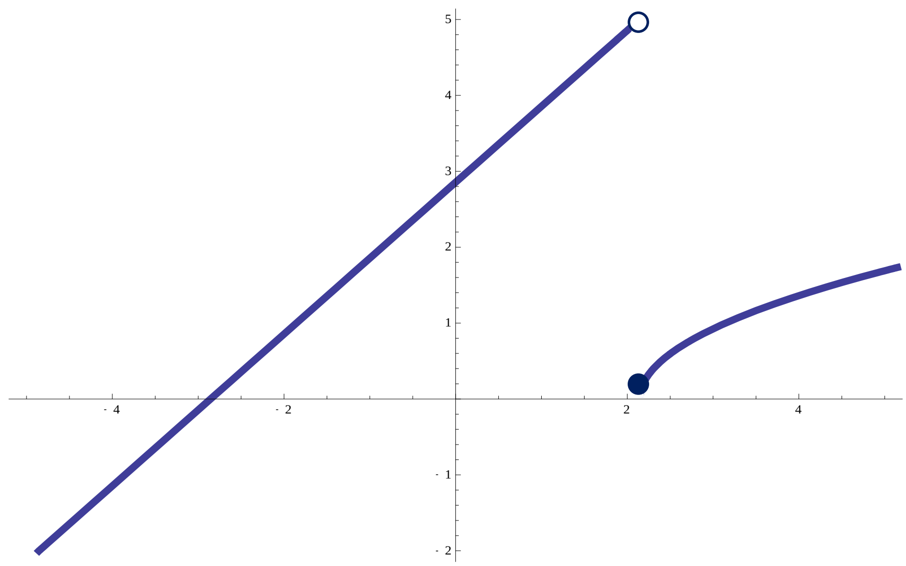
$$f(x) \geq 2 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Así, finalmente:

$$\boxed{(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 4} & \textbf{si } x \in (-1, 1) \\ \sqrt{\boldsymbol{x^2 - 1}} & \textbf{si } x \in \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big) \end{cases}}$$

Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$:

$g(x)$



$f(x)$